WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Über 7 Brücken ...

wissen.leben
WWU Münster

Dietmar Lammers

Hochschultag 201

> Dauerwerbeveranstaltung

für ein Studium der Informatik- aber mit mathematischem Inhalt!
Hier: Ein Auszug aus einer Vorlesung im BA-Informatik Grundstudium (2. Semester)
outline:
Informatik über all um uns herum, eine Welt voll von Informatik.

- Wie beschreibt man die Welt?

> Dauerwerbeveranstaltung

für ein Studium der Informatik- aber mit mathematischem Inhalt!
Hier: Ein Auszug aus einer Vorlesung im BA-Informatik Grundstudium (2. Semester)
outline:
Informatik über all um uns herum, eine Welt voll von Informatik.

- Wie beschreibt man die Welt?
- Graphen als mathematische Struktur

> Dauerwerbeveranstaltung

für ein Studium der Informatik- aber mit mathematischem Inhalt!
Hier: Ein Auszug aus einer Vorlesung im BA-Informatik Grundstudium (2. Semester)
outline:
Informatik über all um uns herum, eine Welt voll von Informatik.

- Wie beschreibt man die Welt?
- Graphen als mathematische Struktur
- Das Königsberger Brückenproblem

> Dauerwerbeveranstaltung

für ein Studium der Informatik- aber mit mathematischem Inhalt!
Hier: Ein Auszug aus einer Vorlesung im BA-Informatik Grundstudium (2. Semester)
outline:
Informatik über all um uns herum, eine Welt voll von Informatik.

- Wie beschreibt man die Welt?
- Graphen als mathematische Struktur
- Das Königsberger Brückenproblem
- Beweisbegriff

> Dauerwerbeveranstaltung

für ein Studium der Informatik- aber mit mathematischem Inhalt!
Hier: Ein Auszug aus einer Vorlesung im BA-Informatik Grundstudium (2. Semester)
outline:
Informatik über all um uns herum, eine Welt voll von Informatik.

- Wie beschreibt man die Welt?
- Graphen als mathematische Struktur
- Das Königsberger Brückenproblem
- Beweisbegriff
- Leonard Euler

> Die Welt - z.B. die WWU

- an der WWU gibt es Fakultäten und Fachbereiche, darin meist Institute

> Die Welt - z.B. die WWU

- an der WWU gibt es Fakultäten und Fachbereiche, darin meist Institute
- manche Institute - wie das EIMI - gehören auch nicht zu Fachbereichen

> Die Welt - z.B. die WWU

- an der WWU gibt es Fakultäten und Fachbereiche, darin meist Institute
- manche Institute - wie das EIMI - gehören auch nicht zu Fachbereichen
- Es gibt Personen, die an der WWU arbeiten, forschen und lehren

> Die Welt - z.B. die WWU

- an der WWU gibt es Fakultäten und Fachbereiche, darin meist Institute
- manche Institute - wie das EIMI - gehören auch nicht zu Fachbereichen
- Es gibt Personen, die an der WWU arbeiten, forschen und lehren
- Es gibt Sonderforschungsbereiche (SFBs) und andere Forschungseinrichtungen, zu denen die Einzelpersonen oder die Institute beitragen.

> Die Welt - z.B. die WWU

- an der WWU gibt es Fakultäten und Fachbereiche, darin meist Institute
- manche Institute - wie das EIMI - gehören auch nicht zu Fachbereichen
- Es gibt Personen, die an der WWU arbeiten, forschen und lehren
- Es gibt Sonderforschungsbereiche (SFBs) und andere Forschungseinrichtungen, zu denen die Einzelpersonen oder die Institute beitragen.
- Es gibt verschiedene Lehrveranstaltungen

> Die Welt - z.B. die WWU

- an der WWU gibt es Fakultäten und Fachbereiche, darin meist Institute
- manche Institute - wie das EIMI - gehören auch nicht zu Fachbereichen
- Es gibt Personen, die an der WWU arbeiten, forschen und lehren
- Es gibt Sonderforschungsbereiche (SFBs) und andere Forschungseinrichtungen, zu denen die Einzelpersonen oder die Institute beitragen.
- Es gibt verschiedene Lehrveranstaltungen
- Es gibt Gebäude, in denen das alles stattfindet

> Die Welt - z.B. die WWU

- an der WWU gibt es Fakultäten und Fachbereiche, darin meist Institute
- manche Institute - wie das EIMI - gehören auch nicht zu Fachbereichen
- Es gibt Personen, die an der WWU arbeiten, forschen und lehren
- Es gibt Sonderforschungsbereiche (SFBs) und andere Forschungseinrichtungen, zu denen die Einzelpersonen oder die Institute beitragen.
- Es gibt verschiedene Lehrveranstaltungen
- Es gibt Gebäude, in denen das alles stattfindet
- ...

> Die Welt - z.B. die WWU

... mal mal auf!

> Die Welt - Eine Fussballmannschaft

... design mal!

> Die Welt - virtuell

- Internet der Dinge

> Die Welt - virtuell

- Internet der Dinge
- Sematic Web - http://www.w3.org/standards/semanticweb/

> Die Welt - virtuell

- Internet der Dinge
- Sematic Web - http://www.w3.org/standards/semanticweb/
- Onthologien

> Die Welt - virtuell

- Internet der Dinge
- Sematic Web - http://www.w3.org/standards/semanticweb/
- Onthologien
- Resource Description Framework (RDF)

> Die Welt - virtuell

- Internet der Dinge
- Sematic Web - http://www.w3.org/standards/semanticweb/
- Onthologien
- Resource Description Framework (RDF)
- und Web Onthology Language (OWL)

> Graphen - Grundlagen

Definition

Ein (ungerichteter) *Graph* ist ein Tupel $G = (V, E)$, wobei V eine endliche, nichtleere Menge von Knoten ist, und die Menge $E = \{\{x, y\} | x, y \in V\}$ die Kanten zwischen Knoten spezifiziert..

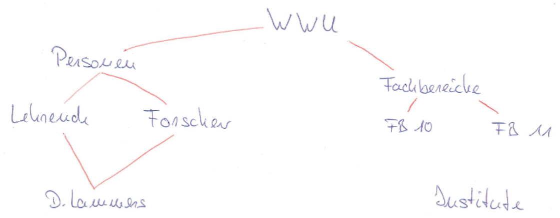
> Graphen - Grundlagen

Definition

Ein (ungerichteter) *Graph* ist ein Tupel $G = (V, E)$, wobei V eine endliche, nichtleere Menge von Knoten ist, und die Menge $E = \{\{x, y\} | x, y \in V\}$ die Kanten zwischen Knoten spezifiziert..

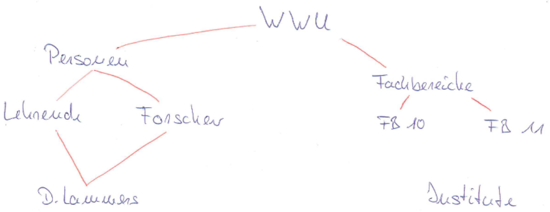
Zur Vereinfachung der Schreibweise schreibt man auch (x, y) für eine Kante in E, und setzt für ungerichtete Graphen $(x, y) = (y, x)$.

> Graphen - Grundlagen



$V = \{WWU, Personen, Lehrende, Forscher, D.Lammers, Fachbereiche, FB10, FB11, Institute\}$

> Graphen - Grundlagen



E = { {WWU,Personen},{WWU,Fachbereiche},
{Personen,Lehrende},{Personen,Forscher},
{Lehrende,D.Lammers}, {Forscher, D.Lammers},
{Fachbereiche,FB10}, {Fachbereiche,FB11} }

> Graphen - Grundlagen

Definition

Für einen Graph (V, E) und $v \in V$ heisst

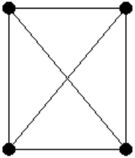
$$deg(v) := |\{x|(v, x) \in E\}|$$

der *Grad von* v.

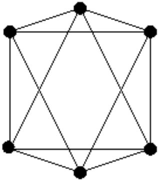
$$\{x|(v, x) \in E\}$$

ist die *Nachbarschaft* des Knotens v.

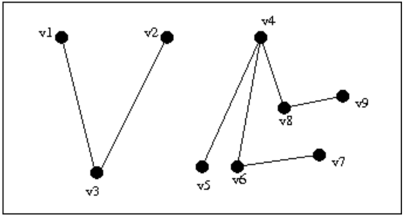
> Graphen - Grundlagen



deg(v) = 3



deg(v) = 4



> Graphen- spezielle Graphen

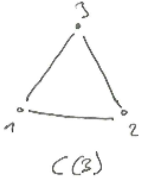
Definition

Graphen mit n paarweise zyklisch verbundenen Kanten heißen *Kreise* (vom Grad n) und werden mit C_n bezeichnet.

> Graphen- spezielle Graphen

Definition

Graphen mit *n* paarweise zyklisch verbundenen Kanten heißen *Kreise* (vom Grad *n*) und werden mit C_n bezeichnet.



> Graphen - Pfade

Definition

In einem Graphen $G = (V, E)$ ist

> Graphen - Pfade

Definition

In einem Graphen $G = (V, E)$ ist

- Ein *Weg* (der Länge n) von v_1 nach v_n ist ein Element $(v_1, ..., v_n) \in V^n$, bei dem für $i = 1, ..., n-1$ jeweils $(v_i, v_{i+1}) \in E$ liegt.

> Graphen - Pfade

Definition

In einem Graphen $G = (V, E)$ ist

- Ein *Weg* (der Länge n) von v_1 nach v_n ist ein Element $(v_1, ..., v_n) \in V^n$, bei dem für $i = 1, ..., n-1$ jeweils $(v_i, v_{i+1}) \in E$ liegt.
- Ein *Pfad* ist ein Weg ohne doppelt autretende Knoten.

> Graphen - Pfade

Definition

In einem Graphen $G = (V, E)$ ist

- Ein *Weg* (der Länge n) von v_1 nach v_n ist ein Element $(v_1, ..., v_n) \in V^n$, bei dem für $i = 1, ..., n-1$ jeweils $(v_i, v_{i+1}) \in E$ liegt.
- Ein *Pfad* ist ein Weg ohne doppelt autretende Knoten.
- $U \subset V$ heißt *Zusammenhangskomponente*, wenn für alle Paare $v, w \in U$ ein Pfad von v nach w existiert.

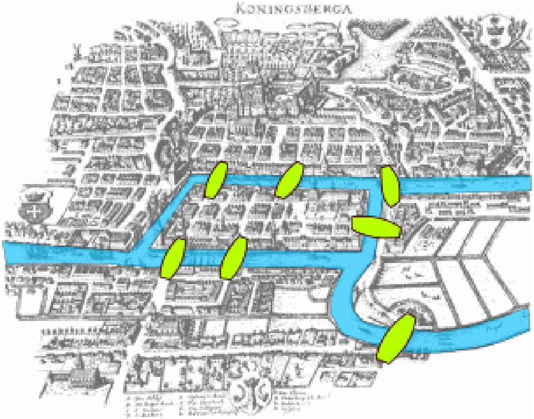
> Graphen - Pfade

Definition

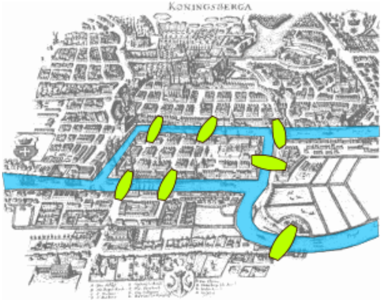
In einem Graphen $G = (V, E)$ ist

- Ein *Weg* (der Länge n) von v_1 nach v_n ist ein Element $(v_1, ..., v_n) \in V^n$, bei dem für $i = 1, ..., n-1$ jeweils $(v_i, v_{i+1}) \in E$ liegt.
- Ein *Pfad* ist ein Weg ohne doppelt autretende Knoten.
- $U \subset V$ heißt *Zusammenhangskomponente*, wenn für alle Paare $v, w \in U$ ein Pfad von v nach w existiert.
- $G = (V, E)$ heißt *zusammenhängend*, wenn V eine Zusammenhangskomponente ist.

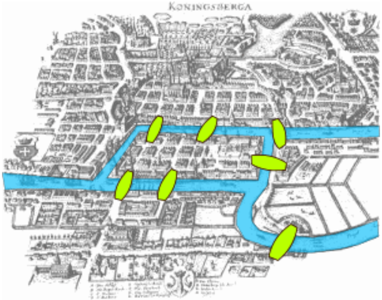
> Touren



> Touren

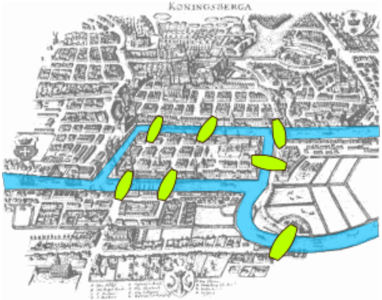


> Touren



Gibt es in der Stadt Königsberg einen Rundweg, bei dem man alle sieben Brücken der Stadt über den Pregel genau einmal überquert und wieder zum Ausgangspunkt gelangt?

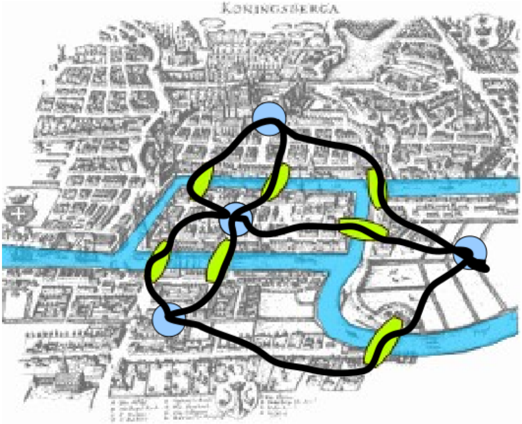
> Touren



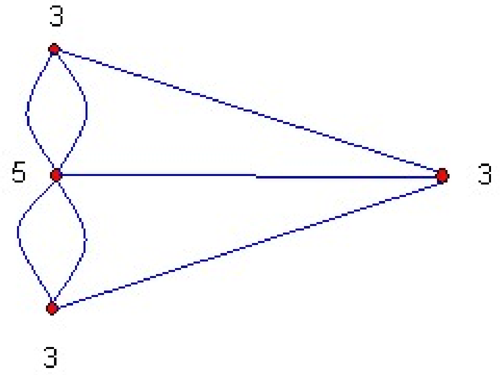
→ Leonhard Euler, 1707-1783

Gibt es in der Stadt Königsberg einen Rundweg, bei dem man alle sieben Brücken der Stadt über den Pregel genau einmal überquert und wieder zum Ausgangspunkt gelangt?

> Touren



> Touren



> Touren

Definition

Eine *Eulertour* (oder falsch ein *Eulerkreis*) ist ein geschlossener Pfad in einem Graphen, der jede **Kante** genau einmal enthält. Enthält ein Graph G eine Eulertour, nennt man ihn *eulersch*.

> Touren

Satz

Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ ist genau dann eulersch, wenn der Grad aller Knoten gerade ist.

> Touren

Satz

Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ ist genau dann eulersch, wenn der Grad aller Knoten gerade ist.

Beweis.

($\rightarrow$): Enhält G eine Eulertour, geht diese in jeden Knoten genau so oft “hinein” wie “hinaus” - deswegen ist der Knotengrad gerade. $\square$

> Touren

Satz

Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ *ist genau dann eulersch, wenn der Grad aller Knoten gerade ist.*

> Touren

Satz

Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ ist genau dann eulersch, wenn der Grad aller Knoten gerade ist.

Beweis.

($\leftarrow$): Sei also der Knotengrad gerade für alle Knoten. Wir wählen nun einen beliebigen Knoten v_1, und gehen von dort zu einem Knoten v_2, und markieren dabei die Kante (v_1, v_2) als benutzt. Von v_2 gehen wir über eine noch nicht markierte Kante (mindestens eine muss es ja geben) weiter zu v_3, und markieren wieder. Das Verfahren setzen wir fort. Da es immer eine unbenutzte Kante finden, müssen wir irgendwann wieder in in v_1 ankommen. $\square$

> Touren

Beweis.

(Fortsetzung) Dann haben wir zwei Situationen:

□

> Touren

Beweis.

(Fortsetzung) Dann haben wir zwei Situationen:

1. Es gibt noch mindestens einen Knoten w mit unmarkierten Kanten. Da G zusammenhängend ist, muss es dann eine nicht markierte Kante geben. die von w ausgeht. Wir können dann das Verfahren (rekursiv) in w wieder starten, und nacher die beiden Wege zu einem verbinden.

□

> Touren

Beweis.

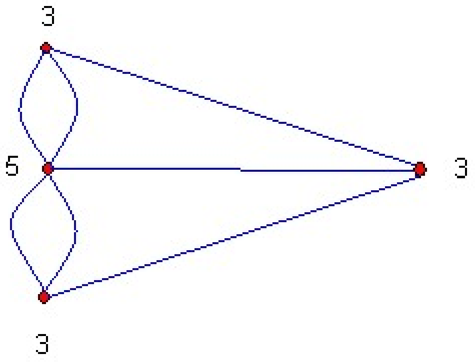
(Fortsetzung) Dann haben wir zwei Situationen:

1. Es gibt noch mindestens einen Knoten w mit unmarkierten Kanten. Da G zusammenhängend ist, muss es dann eine nicht markierte Kante geben. die von w ausgeht. Wir können dann das Verfahren (rekursiv) in w wieder starten, und nacher die beiden Wege zu einem verbinden.
2. Alle Kanten sind markiert - dann haben wir einen Eulerkreis gefunden.

$\square$

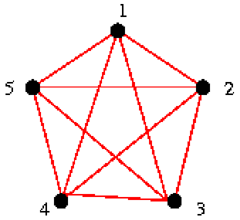
> Touren

Mit diesem Satz ist klar, das es für das Königsberger Brückenproblen keinen Weg gibt, da mindestens einige Knotengrade ungerade sind:

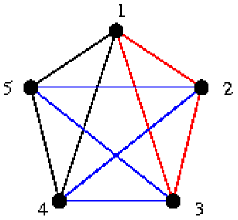


> Touren

Der Satz gilt aber für alle Graphen!



Eulertour (1,3,5,2,4,1,2,3,4,5,1)



Zusammengesetzte Eulertour:
E1 = (1,4,5,1)
E2 = (1,3,2,1)
E3 = (2,4,3,5,2)

> Beweisbegriff

- Aussagen in den exakten Wissenschaften (und Mathematik und Informatik sind solche) müssen *bewiesen* werden.

> Was ist ein Beweis?

- Streng: Eine formale Herleitung einer Aussage aus den Axiomen in einem formalen System

> Was ist ein Beweis?

- Streng: Eine formale Herleitung einer Aussage aus den Axiomen in einem formalen System
- Mindestens: Eine semiformale Herleitung einer Folgerung aus (allen) Voraussetzungen, bei denen die Einzelschritte gut nachvollziehbar sind und ggf. auch vollständig im formalen System formuliert werden könnten.

> Was ist ein Beweis?

- Streng: Eine formale Herleitung einer Aussage aus den Axiomen in einem formalen System
- Mindestens: Eine semiformale Herleitung einer Folgerung aus (allen) Voraussetzungen, bei denen die Einzelschritte gut nachvollziehbar sind und ggf. auch vollständig im formalen System formuliert werden könnten.
- *Nicht:* Eine schwammig begründete Meinungsäusserung oder ein Votum.

> Beweistechniken (1)

Sei der Satz $A \rightarrow B$ zu beweisen. Das kann man auf mehrere Arten machen.

direkt: Man nimmt an, das A gilt, und leitet daraus mit gültigen (formalen) Schritten B ab.

> Beweistechniken (1)

Sei der Satz $A \to B$ zu beweisen. Das kann man auf mehrere Arten machen.

direkt: Man nimmt an, das A gilt, und leitet daraus mit gültigen (formalen) Schritten B ab.

indirekt: Man nimmt an,das B *nicht* gilt, und folgert daraus, das dann auch A nicht gilt.

> Beweistechniken (1)

Sei der Satz $A \rightarrow B$ zu beweisen. Das kann man auf mehrere Arten machen.

direkt: Man nimmt an, das A gilt, und leitet daraus mit gültigen (formalen) Schritten B ab.

indirekt: Man nimmt an,das B *nicht* gilt, und folgert daraus, das dann auch A nicht gilt.

durch Widerspruch: Man nimmt an, das gilt $A \wedge \neg B$, und leitet daraus eine Widerspruch zu einer gültigen Aussage ab.

> Beweistechniken (1)

Sei der Satz $A \rightarrow B$ zu beweisen. Das kann man auf mehrere Arten machen.

direkt: Man nimmt an, das A gilt, und leitet daraus mit gültigen (formalen) Schritten B ab.

indirekt: Man nimmt an,das B *nicht* gilt, und folgert daraus, das dann auch A nicht gilt.

durch Widerspruch: Man nimmt an, das gilt $A \wedge \neg B$, und leitet daraus eine Widerspruch zu einer gültigen Aussage ab.

induktiv: Für induktiv aufgebaute Systeme beweist man eine Aussage für einen Startzustand, und zeigt dann, das es, wenn es für einen Zustand gilt, dann für den Nachfolgezustand auch gelten muss.

> Euler

- Euler wurde am 15.4.1707 in Basel als ältester Sohn des Pfarrers Paul Euler geboren.

> Euler

- Euler wurde am 15.4.1707 in Basel als ältester Sohn des Pfarrers Paul Euler geboren.
- Ab 1720 studierte er an der Universität Basel und hörte hier Vorlesungen von Johann Bernoulli.

> Euler

- Euler wurde am 15.4.1707 in Basel als ältester Sohn des Pfarrers Paul Euler geboren.
- Ab 1720 studierte er an der Universität Basel und hörte hier Vorlesungen von Johann Bernoulli.
- 1723 erlangte er durch einen Vergleich der newtonschen und cartesianischen Philosophie in lateinischer Sprache die Magisterwürde.

> Euler

- Euler wurde am 15.4.1707 in Basel als ältester Sohn des Pfarrers Paul Euler geboren.
- Ab 1720 studierte er an der Universität Basel und hörte hier Vorlesungen von Johann Bernoulli.
- 1723 erlangte er durch einen Vergleich der newtonschen und cartesianischen Philosophie in lateinischer Sprache die Magisterwürde.
- 17. Mai 1727 berief ihn Daniel Bernoulli an die Universität Sankt Petersburg. Er erbte die Professur des 1726 verstorbenen Nikolaus II. Bernoulli.

> Euler

- 1733 trat er die Nachfolge von Daniel Bernoulli als Professor für Mathematik an.

> Euler

- 1733 trat er die Nachfolge von Daniel Bernoulli als Professor für Mathematik an.
- 1741 wurde er von Friedrich dem Großen an die Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften berufen.

> Euler

- 1733 trat er die Nachfolge von Daniel Bernoulli als Professor für Mathematik an.
- 1741 wurde er von Friedrich dem Großen an die Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften berufen.
- 1766 von Berlin zurück nach St. Petersburg.

> Euler

- 1733 trat er die Nachfolge von Daniel Bernoulli als Professor für Mathematik an.
- 1741 wurde er von Friedrich dem Großen an die Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften berufen.
- 1766 von Berlin zurück nach St. Petersburg.
- 1783 starb Euler. Er hatte bis dahin 866 (meist mathematische) Schriften verfasst

> Euler

http://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler